Олимпиада школьников «Звезда»
Задачи по математике

6 марта 2016 г.

Решения и критерии оценивания

6 класс
Вариант 1

1. Бригада косцов скосила весь луг за два дня. В первый день было убрано половина луга и ещё 3 га, во второй день — треть остатка и ещё 6 га. Какова площадь луга?

Ответ: 24 га.

Решение. 6 га составили две трети остатка. Значит, во второй день скошено 9 га. Вместе с 3 га первого дня получаем 12 га, составляющих половину площади луга. Поэтому общая площадь луга 24 га.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. В записи $1*2*3*4*5*6*7*8*9=100$ замените звёздочки знаками арифметических действий так, чтобы получить верное равенство.

Решение. $1+2+3+4+5+6+7+8\cdot 9=100$.

Оценивание. За верное решение 12 б.

3. Сумма нескольких чисел равна 2. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

Ответ: Да. Например, $100\cdot 0{,}02^2=0{,}04$.

Оценивание. За верное решение 12 б.

4. Петя поставил на поле для морского боя (его размер 10×10) корабль размером 1×4 (корабль может стоять и горизонтально, и вертикально). Сможет ли Вася, сделав 24 выстрела, наверняка его подбить?

Ответ: Да. Например, он может стрелять по таким клеткам

			*				*		
		*				*			
	*				*				*
*				*				*	
			*				*		
		*				*			
	*				*				*
*				*				*	
			*				*		
		*				*			

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

«Естественные науки»

Задачи по физике.

2015/16уч.г.

Задача №1 (10 баллов)

Расстояние между домом Ивана и домом бабушки 12 $км$. Ровно в $12^{\underline{00}}$ Иван вышел из дома и пошел по прямой дороге к бабушке со скоростью 1 $м/с$. В $12^{\underline{30}}$ родители Ивана позвонили бабушке, сообщили ей, что Иван идет в гости, а бабушка выпустила пса Тузика ему навстречу. Тузик бежит со скоростью 9 $м/с$. Определите момент времени, когда Тузик добежит до Ивана.

Решение:

За полчаса Иван пройдет:

$S = vt = 1 \cdot 30 \cdot 60 = 1800$ метров. **(3 балла)**

Т.е. между ним и Тузиком остается:

$12000 - 1800 = 10200$ метров, которые Иван с Тузиком преодолеют за:

$t = \dfrac{10200}{1+9} = 1020\,с = 17\,мин$. **(3 балла)**

Т.е. момент времени когда Тузик добежит до Ивана – $12^{\underline{47}}$ **(4 балла)**

Задача №2 (15 баллов)

Пустая стеклянная банка в три раза легче той же банки до краев наполненной молоком. Если известно, что объем занимаемый стеклом в десять раз меньше объема занимаемого молоком, то сравните плотности стекла и молока. Плотностью материала называют отношение массы материала к его объему.

Решение:

Из условия:

$m_{CT} = \frac{m_{CT} + m_M}{3}$, т.е. $m_M = 2m_{CT}$ **(5 баллов)**

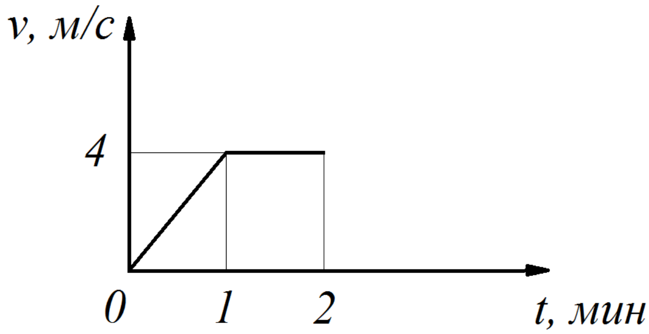
$10 \cdot V_{CT} = V_M$ **(5 баллов)**

Т.е. плотность:

$\rho_M = \frac{m_M}{V_M} = \frac{2m_{CT}}{10V_{CT}} = 0{,}2\rho_{CT}$ **(5 баллов)**

Задача №3 (10 баллов)

На рисунке приведена зависимость скорости велосипедиста, катящегося по прямой, от времени. Какое расстояние он проехал за две минуты?



Решение:

Путь за первую минуту:

$S = vt = 2 \cdot 1 \cdot 60 = 120\,м$ **(3балла)**

Путь за вторую минуту:

$S = 4 \cdot 1 \cdot 60 = 240\,м$ **(3 балла)**

Итого:

$S = 120 + 240 = 360$ *метров* **(4 балла)**

Задача №4 (15 баллов)

По горизонтальному бревну ползет жук со скоростью $v_ж = 2\ см/с$. Навстречу ему ползет паук, причем в начальный момент времени расстояние между ними 2 метра. Определить скорость паука, если известно, что расстояние между ними через 30 секунд составляло $20\ см$.

Решение:

За 30 секунд жук проползет:

$s = v_ж t = 2 \cdot 30 = 60\ см$ **(5 баллов)**

Следовательно, с пауком возможно два варианта: он прополз:

или $120\ см$, **(3 балла)**

или $160\ см$ **(3 балла)**

Следовательно, для скорости паука возможны два варианта:

$v_1 = \frac{120}{30} = 4\ см/с$ **(2 балла)**

или

$v_2 = \frac{160}{30} \approx 5{,}3\ см/с$ **(2 балла)**

Олимпиада школьников «Звезда»
Задачи по математике
6 марта 2016 г.
Решения и критерии оценивания

7 класс
Вариант 1

1. В ряд выписаны числа 1, 2, 3, ..., 2014, 2015. Назовём число из этого ряда хорошим, если после его удаления сумма всех оставшихся 2014 чисел делится нацело на 2016. Найдите все хорошие числа.

Ответ: Единственное хорошее число 1008.

Решение. Остаток от деления суммы всех 2015 чисел на 2016 равен 1008:

$$(1+2015)+(2+2014)+\ldots+(1007+1009)+1008 = 2016\cdot 1007+1008.$$

Поэтому вычеркнуть можно только 1008.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если показано, что 1008 — хорошее число, но не доказано, что других хороших чисел нет, 6 баллов.

2. В компании из 39 человек каждый либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Они по очереди сделали такие заявления:

- «Количество рыцарей в нашей компании – делитель 1»;
- «Количество рыцарей в нашей компании — делитель 2»;
- «Количество рыцарей в нашей компании — делитель 3»;
- ...
- «Количество рыцарей в нашей компании — делитель 39».

Сколько рыцарей могло быть в этой компании?

Ответ: 0 или 6.

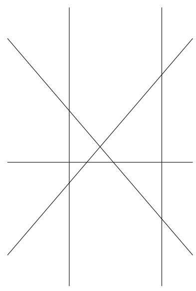
Решение. Пусть k — количество рыцарей в компании. Если $k=0$ (каждый — лжец), то все солгали, как и должно быть. Если $k>0$, верными ответами будут ответы с номерами $k, 2k, 3k, \ldots, mk$, где $mk \leqslant 39$. Общее количество верных ответов будет равно m. Если $k = 1, 2, 3, 4, 5$, верных ответ будет слишком много: $m = 39, 19, 13, 9, 7$ соответственно; возникает противоречие: $m > k$. Если $k = 6$, то прозвучит ровно 6 верных ответов, как и должно быть. Если же $k \geqslant 7$, чисел, кратных k, будет не более пяти, то есть меньше k, что приводит к противоречию.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если упущен случай $k = 0$, 8 баллов. Если рассмотрен только случай $k = 0$, 3 балла. Если показано только, что $k = 6$ подходит, то 4 балла.

3. Можно ли провести на плоскости 5 прямых так, чтобы никакие три из них не проходили через одну точку, а всего было а) ровно 11; б) ровно 9 точек пересечения?

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. Наибольшее число точек пересечения получится, если среди прямых нет двух параллельных и никакие три прямые не проходят через одну точку. В этом случае на каждой из 5 прямых по 4 точки пересечения, а всего точек пересечения $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$, так как каждая точка пересечения принадлежит ровно двум прямым. Значит, 11 точек пересечения не может быть. А 9 может, если какие-то две прямые будут параллельны (пример показан на рис.)



Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если сделан только один из пунктов, 6 баллов. В примере обязательно должно быть указано, что есть параллельные прямые! (Если какие-то три прямые пройдут через одну точку, то точек пересечения будет не более 8).

4. Петя поставил на поле для морского боя (его размер 10×10) корабль размером 1×4 (корабль может стоять и горизонтально, и вертикально). Сможет ли Вася, сделав 24 выстрела, наверняка его подбить?

Ответ: Да. Например, он может стрелять по таким клеткам

			*				*		
		*				*			
	*				*				*
*				*				*	
			*				*		
		*				*			
	*				*				*
*				*				*	
			*				*		
		*				*			

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

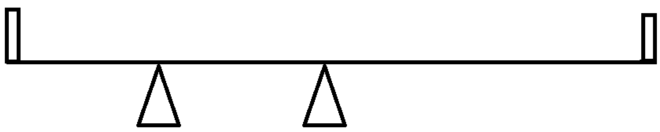
«Естественные науки»

Задачи по физике.

2015/16уч.г.

Задача №1 (10 баллов)

Тонкий невесомый стержень опирается на две тонкие опоры. Правая опора расположена по центру стержня, а левая опора на расстоянии четверти длины стержня от его левого конца (см. рисунок). На правом конце стержня поставили груз массой $m_П = 1\ кг$. Груз какой массы должен располагаться на левом конце стержня, для того чтобы он находился в равновесии?



Решение:

Правило моментов относительно левой опоры:

$m_Л g \frac{1}{4} l = m_П g \frac{3}{4} l$. Отсюда, получаем: $m_Л = 3\ кг$ **(3 балла)**

Правило моментов относительно правой опоры:

$m_Л g \frac{1}{2} l = m_П g \frac{1}{2} l$. Отсюда, получаем: $m_Л = 1\ кг$ **(3 балла)**

Окончательный ответ:

$1\ кг \le m_Л \le 3\ кг$ **(4 балла)**

Задача №2 (10 баллов)

Имеется два кубика. Масса второго на $25\ \%$ меньше массы первого, а длина ребра второго кубика на $25\ \%$ больше, чем первого. На сколько процентов плотность второго кубика отличается от плотности первого?

Решение:

Объем второго кубика:

$V = a^3 = (1{,}25a)^3$ **(4 балла)**

А его плотность:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0{,}75m}{(1{,}25a)^3} = 0{,}384\frac{m}{a^3}.$$ **(4 балла)**

Т.е. плотность второго кубика меньше плотности первого на $61{,}6\ \%$ **(2 балла)**

Задача №3 (15 баллов)

Капли дождя падают вертикально со скоростью $2\ м/с$. Масса одной капли $5\ мг$. В одном кубометре воздуха находится 400 капель. За какое время полностью наполнится водой цилиндрический сосуд высотой $20\ см$ и площадью основания $10\ см^2$? Плотность воды $\rho_В = 1000\ кг/м^3$.

Решение:

В одном кубометре воздуха находится $400 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 0{,}002\ кг$ воды. **(3 балла)**

Т.е. на квадратный метр поверхности за одну секунду падает $0{,}004\ кг$ воды **(3 балла)**

Следовательно, на $10\ см^2$ падает за одну секунду $4 \cdot 10^{-6}\ кг$ воды. **(3 балла)**

Полностью заполненный сосуд будет содержать:

$m = \rho V = 1000 \cdot 0{,}2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 0{,}2\ кг$ воды. **(3 балла)**

Т.е. сосуд заполнится за:

$$t = \frac{0{,}2}{4 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^4\ секунд \approx 833{,}3\ минут \approx 13{,}9\ часа$$ **(3 балла)**

Задача №4 (15 баллов)

Поезд заехал на железнодорожный мост длиной $1400\ м$ со скоростью $54\ км/ч$. Человек идет по поезду в направлении противоположном направлению движения поезда со скоростью $3{,}6\ км/ч$. Длина одного вагона $23\ м$. В каком вагоне будет находиться человек к моменту времени, когда он покинет пределы моста? В момент попадания на мост человек находился в первом вагоне.

Решение:

Переводим исходные данные в систему СИ:

$54\ км/ч = 15\ м/с$

$3{,}6\ км/ч = 1\ м/с$

Скорость человека относительно земли:

$v_ч = 15 - 1 = 14\ м/с$ **(4 балла)**

Т.е. человек будет находиться на мосту в течении:

$t = \dfrac{1400}{14} = 100\ с$ **(2 балла)**

За это время он пройдет по поезду:

$S = vt = 1 \cdot 100 = 100\ м$, **(2 балла)**

что соответствует длине $\dfrac{100}{23} \approx 4{,}35$ вагонов. **(2 балла)**

Т.к. неизвестно в какой части первого вагона он находился в начальный момент времени, то к моменту покидания моста человек находился **или в пятом или в шестом вагоне** **(5 баллов)**

Олимпиада школьников «Звезда»
Задачи по математике
6 марта 2016 г.
Решения и критерии оценивания

8 класс
Вариант 1

1. У старшего брата на 25% денег больше, чем у младшего. Какую долю своих денег должен старший отдать младшему, чтобы денег у них стало поровну?

Ответ: 1/10 или 10%.

Решение. Пусть у младшего x рублей. Тогда у старшего $1{,}25x$ рублей. Чтобы денег у них стало поровну, старший должен отдать младшему $0{,}125x$ рублей, что составляет 10% его денег.

Оценивание. За верное решение 10 баллов. Если в решении будет написано: «Пусть, к примеру, у младшего 100 руб. Тогда...», баллы не снижать!

2. Петя записал на доске натуральное число, а Вася стёр в нём первые две цифры. В результате число уменьшилось в 149 раз. Каким может быть Петино число, если известно, что оно нечётное?

Ответ: 745 или 3725.

Решение. Петино число представим в виде $10^k a + b$, где $10 \leqslant a \leqslant 99$, $b < 10^k$. По условию, $10^k a + b = 149b$. Отсюда $10^k a = 37 \cdot 4b$. Поскольку 10^k и 37 взаимно простые числа, число a должно делиться на 37. Из двухзначных чисел таким свойством обладают только 37 и 74.

Если $a = 37$, то $10^k = 4b$. Поскольку b нечётно, 10^k делится на 4, но не делится на 8. Стало быть, $k = 2$, $b = 25$, а искомое число 3725.

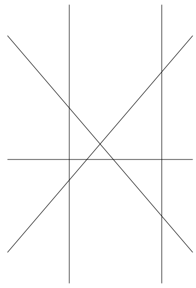
Если $a = 74$, то $10^k = 2b$. Поскольку b нечётно, 10^k делится на 2, но не делится на 4. Стало быть, $k = 1$, $b = 5$, а искомое число 745.

Оценивание. За верное решение 13 баллов. При отсутствии обоснований, что других решений нет, за каждый найденный ответ по 2 б.

3. Можно ли провести на плоскости 5 прямых так, чтобы никакие три из них не проходили через одну точку, а всего было а) ровно 11; б) ровно 9 точек пересечения?

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. Наибольшее число точек пересечения получится, если среди прямых нет двух параллельных и никакие три прямые не проходят через одну точку. В этом случае на каждой из 5 прямых по 4 точки пересечения, а всего точек пересечения $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, так как каждая точка пересечения принадлежит ровно двум прямым. Значит, 11 точек пересечения не может быть. А 9 может, если какие-то две прямые будут параллельны (пример показан на рис.)



Оценивание. За верное решение 13 баллов. Если сделан только один из пунктов, 6 баллов. В примере обязательно должно быть указано, что есть параллельные прямые! (Если какие-то три прямые пройдут через одну точку, то точек пересечения будет не более 8).

4. Петя поставил на поле для морского боя (его размер 10×10) корабль размером 1×4 (корабль может стоять и горизонтально, и вертикально). Сможет ли Вася, сделав 24 выстрела, наверняка его подбить?

Ответ: Да. Например, он может стрелять по таким клеткам

			*				*		
		*				*			
	*				*				*
*				*				*	
			*				*		
		*				*			
	*				*				*
*				*				*	
			*				*		
		*				*			

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

«Естественные науки»

Задачи по физике.

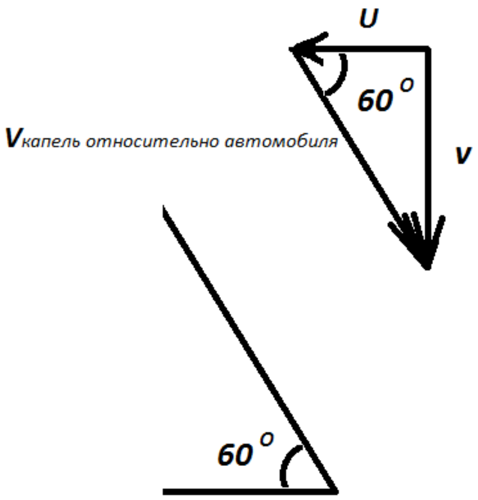
2015/16уч.г.

Задача №1 (10 баллов)

Капли дождя падают в безветренную погоду со скоростью $v = 2\ м/с$. Известно, что заднее стекло легкового автомобиля наклонено под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту. С какой скоростью u должен ехать по горизонтальной ровной дороге автомобиль для того, чтобы его заднее стекло оставалось сухим?

Решение:

Чтобы стекло автомобиля оставалось сухим во время движения, капли относительно стекла должны двигаться параллельно **(5 баллов)**



Получаем, что:

$$u = \frac{v}{tg60^o} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15\ м/с$$ **(3 балла)**

Получили, что автомобиль должен ехать со скоростью **не меньше, чем** $1{,}15\ м/с$

(2 балла)

Задача №2 (10 баллов)

Для транспортировки стальной трубы озером её заварили с двух сторон, чтобы она была водонепроницаема. Определить, при каком наименьшем внутреннем диаметре труба массой $100\ кг$ и длиной $5\ м$ не утонет. Плотность стали $\rho_{СТ} = 7800\ кг/м^3$, плотность воды $\rho_В = 1000\ кг/м^3$.

Решение:

Для плавающей трубы:

$$F_A = mg$$

$$\rho_В g(V_{СТ} + V_{ВОЗДУХА}) = mg$$ **(2 балла)**

$$\rho_В g\left(\frac{m}{\rho_{СТ}} + V_{ВОЗДУХА}\right) = mg$$ **(2 балла)**

Получаем, что объем воздуха внутри трубы:

$$V_{ВОЗДУХА} = \frac{m}{\rho_В} - \frac{m}{\rho_{СТ}} = \frac{100}{1000} - \frac{100}{7800} = \frac{68}{780}\ м^3$$ **(2 балла)**

Данный объем:

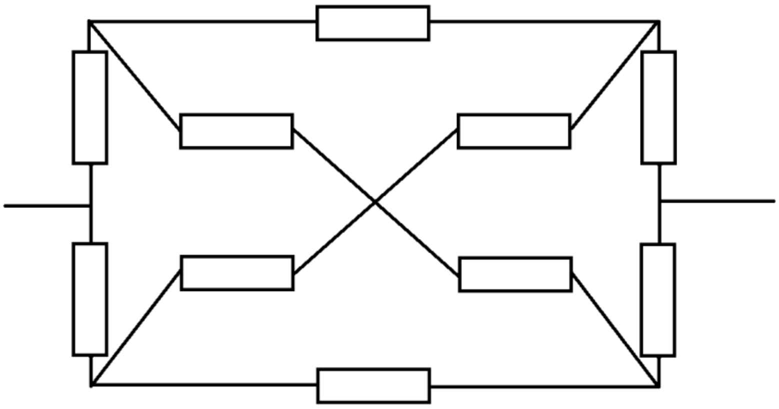
$$V_{ВОЗДУХА} = l \cdot S = l \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$ **(2 балла)**

Т.е. искомый диаметр:

$$D = \sqrt{\frac{4V_{ВОЗДУХА}}{l \cdot \pi}} \approx 0{,}149\ м = \approx 15\ см$$ **(2 балла)**

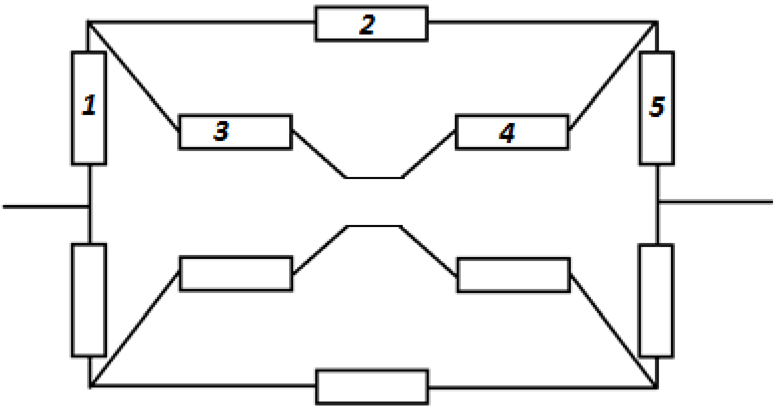
Задача №3 (15 баллов)

Определить сопротивление схемы, если она составлена из десяти одинаковых резисторов сопротивлением $R_0 = 10\ Ом$ каждый.



Решение:

Симметрия схемы позволяет её разрезать представленным ниже образом:



(5 баллов)

Дальше пользуемся формулами последовательного и параллельного соединений резисторов:

$R_{34} = 2R_0$ **(2 балла)**

$R_{234} = \dfrac{2}{3}R_0$ **(2 балла)**

$R_{12345} = \dfrac{8}{3}R_0$ **(2 балла)**

Окончательный результат:

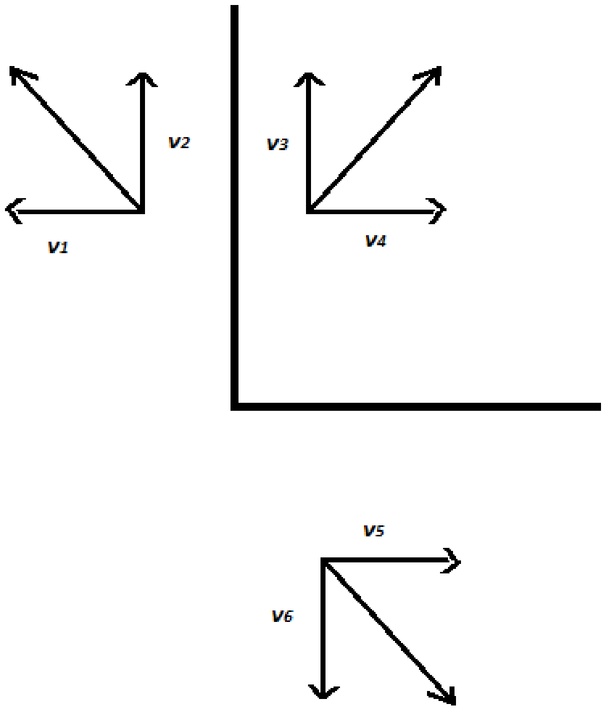
$R = \dfrac{4}{3}R_0 = \dfrac{40}{3} = 13\dfrac{1}{3}\ Ом$ **(4 балла)**

Задача №4 (15 баллов)

Материальная точка двигается в горизонтальной плоскости между двумя взаимно перпендикулярными вертикальными плоскими зеркалами. Её изображение в одном из зеркал удаляется от этого зеркала под углом α к его плоскости со скоростью $v = 1\ м/с$. Определить скорость одного изображения относительно другого.

Решение:

Любую из скоростей (точки, первого или второго изображения) можно разложить на две проекции:



(5 баллов)

Видно, что:

$v_1 = v_4 = v_5$ и $v_2 = v_3 = v_6$ **(5 баллов)**

Получаем, что скорость второго изображения направлена строго противоположно скорости первого.

Следовательно, **окончательный ответ:** $v_{12} = 2\ м/с$ **(5 баллов)**

Олимпиада школьников «Звезда»
Задачи по математике
6 марта 2016 г.
Решения и критерии оценивания

9 класс
Вариант 1

1. У старшего брата на 25% денег больше, чем у младшего. Какую долю своих денег должен старший отдать младшему, чтобы денег у них стало поровну?

Ответ: 1/10 или 10%.

Решение. Пусть у младшего x рублей. Тогда у старшего $1{,}25x$ рублей. Чтобы денег у них стало поровну, старший должен отдать младшему $0{,}125x$ рублей, что составляет 10% его денег.

Оценивание. За верное решение 10 баллов. Если в решении будет написано: «Пусть, к примеру, у младшего 100 руб. Тогда...», баллы не снижать!

2. Петя записал на доске натуральное число, а Вася стёр в нём первые две цифры. В результате число уменьшилось в 149 раз. Каким может быть Петино число, если известно, что оно нечётное?

Ответ: 745 или 3725.

Решение. Петино число представим в виде $10^k a + b$, где $10 \leqslant a \leqslant 99$, $b < 10^k$. По условию, $10^k a + b = 149b$. Отсюда $10^k a = 37 \cdot 4b$. Поскольку 10^k и 37 взаимно простые числа, число a должно делиться на 37. Из двухзначных чисел таким свойством обладают только 37 и 74.

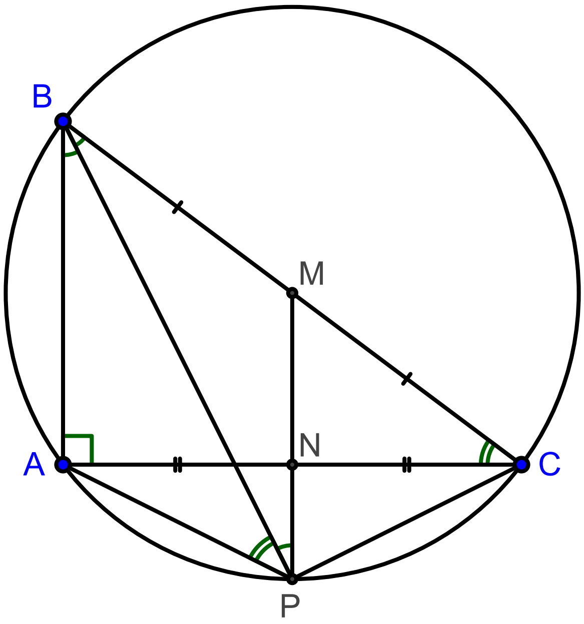
Если $a = 37$, то $10^k = 4b$. Поскольку b нечётно, 10^k делится на 4, но не делится на 8. Стало быть, $k = 2$, $b = 25$, а искомое число 3725.

Если $a = 74$, то $10^k = 2b$. Поскольку b нечётно, 10^k делится на 2, но не делится на 4. Стало быть, $k = 1$, $b = 5$, а искомое число 745.

Оценивание. За верное решение 13 баллов. При отсутствии обоснований, что других решений нет, за каждый найденный ответ по 2 б.

3. ABC — прямоугольный треугольник, M — середина гипотенузы BC, N — середина катета AC, P — точка пересечения биссектрисы угла B и прямой MN. Докажите равенство углов BCA и BPA.

Доказательство. MN — средняя линия треугольника ABC. Поэтому прямые AB и MN параллельны, а углы MPB и ABP равны как накрест лежащие. К тому же $\angle ABP = \angle PBM$ (по определению биссектрисы). Значит, $\angle MPB = \angle PBM$, отсюда треугольник BMP равнобедренный: $BM = MP$.



По условию, $BM = MC$. Стало быть, точка M равноудалена от вершин треугольника BCP, т. е. M — центр описанной окружности, а лежит M на стороне этого треугольника. Поэтому треугольник BPC — прямоугольный, а точки P и A лежат на окружности с диаметром BC. Углы BCA и BPA равны как опирающиеся на одну дугу.

Оценивание. За верное решение 13 баллов.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1; \\ x^3 + y^5 &= 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0;1)$, $(1;0)$.

Решение. Вычтем из второго уравнения первое:

$$x^2(x-1) + y^2(y^3-1) = 0. \qquad (*)$$

Из первого уравнения системы следует, что $x \leqslant 1$ и $y \leqslant 1$. Поэтому $x^2(x-1) \leqslant 0$ и $y^2(y^3-1) \leqslant 0$. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда они оба равны нулю. Если первое слагаемое в левой части уравнения $(*)$ равно нулю, то $x = 0$ или $x = 1$. В первом случае из исходной системы следует, что $y = 1$. А во втором случае, очевидно, $y = 0$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 2 балла.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

«Естественные науки»

Задачи по физике.

2015/16уч.г.

Задача №1 (15 баллов)

Два одинаковых автомобиля едут в одну сторону. Скорость одного $36\ км/ч$, а другой его догоняет со скоростью $54\ км/ч$. Известно, что время реакции водителя заднего автомобиля на включение стоп-сигналов переднего составляет $2\ с$. Какова должна быть дистанция между автомобилями, чтобы они не столкнулись, если первый водитель решил резко затормозить? Для автомобиля подобной марки тормозной путь составляет 40 метров со скорости $72\ км/ч$.

Решение:

Переведем все скорости в единицы СИ:

$36\ км/ч = 10\ м/с$

$54\ км/ч = 15\ м/с$ **(1 балл)**

$72\ км/ч = 20\ м/с$

Ускорение автомобиля подобной марки:

$$a = \frac{v^2}{2S} = \frac{20^2}{2 \cdot 40} = 5\ м/с^2$$ **(3 балла)**

Расстояние, пройденное первым автомобилем до остановки:

$$S_1 = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{10^2}{2 \cdot 5} = 10\ м$$ **(3 балла)**

Расстояние, пройденное вторым автомобилем до остановки:

$$S_2 = v_2 \cdot 2 + \frac{v_2^2}{2a} = 15 \cdot 2 + \frac{15^2}{2 \cdot 5} = 30 + 22{,}5 = 52{,}5\ м$$ **(5 баллов)**

Следовательно, **дистанция между автомобилями должна быть не менее:**

$$l = S_2 - S_1 = 52{,}5 - 10 = 42{,}5\ метров$$ **(3 балла)**

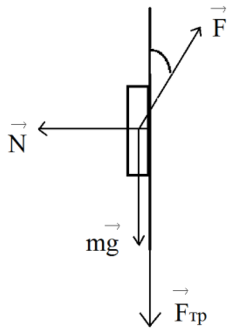
Задача №2 (15 баллов)

Брусок массой $m = 1\,кг$ прикладывают к вертикальной стенке. Коэффициент трения между бруском и стенкой $\mu = 0{,}1$. Определить силу, которую необходимо прикладывать к бруску под углом $\alpha = 60^O$ к стенке для удержания бруска в равновесии.

Решение:

Необходимо рассмотреть две ситуации:

Первая:



Второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$F \sin 60^O = N$ **(2 балла)**

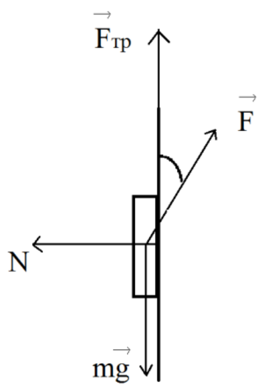
$F \cos 60^O = mg + F_{TP}$ **(2 балла)**

с учетом того, что $F_{TP} = \mu N$, получаем:

$F \cos 60^O = mg + \mu F \sin 60^O$

$F \approx 24{,}18\ H$ **(2 балла)**

Вторая:



Второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$F \sin 60^O = N$ **(2 балла)**

$F \cos 60^O + F_{TP} = mg$ **(2 балла)**

с учетом того, что $F_{TP} = \mu N$, получаем:

$F\cos 60^{o} + \mu F\sin 60^{o} = mg$

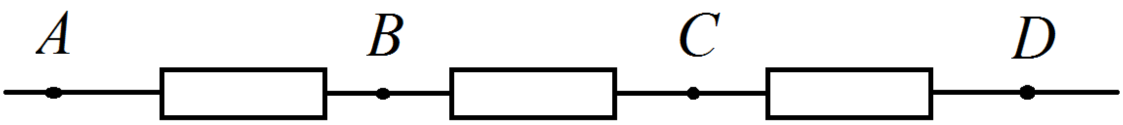
$F \approx 17{,}05\ H$ **(2 балла)**

Окончательный ответ:

$17{,}05\ H \le F \le 24{,}18\ H$ **(3 балла)**

Задача №3 (10 баллов)

Представленная на рисунке схема составлена из одинаковых резисторов. Если точку A соединить с точкой C, а точку B – с точкой D, то сопротивление схемы изменится на $10\ Ом$. Определить сопротивление одного резистора. Для соединения точек использовались перемычки с нулевым сопротивлением.



Решение:

Если сопротивление одного резистора R, то начальное общее сопротивление последовательного соединения равно $3R$ **(1 балл)**

После того как были задействованы перемычки, мы получаем параллельное соединение трех резисторов. **(4 балла)**

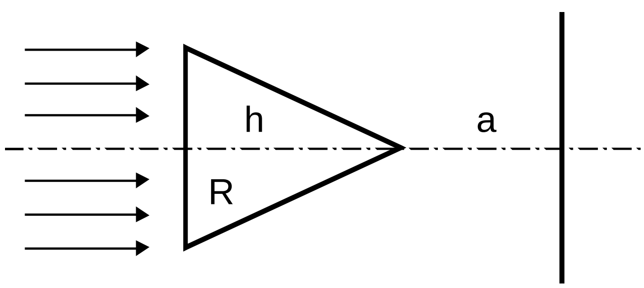
В этом случае их общее сопротивление равно $\frac{R}{3}$ **(1 балл)**

По условию: $3R - \frac{R}{3} = 10$ **(2 балла)**

Окончательный результат: $R = 3{,}75\ Ом$ **(2 балла)**

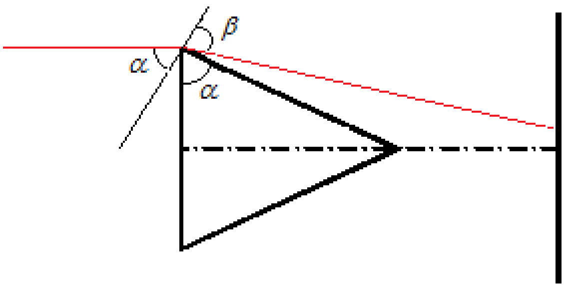
Задача №4 (10 баллов)

Параллельный пучок света падает на основание стеклянного конуса (показатель преломления $n = 1{,}5$) вдоль его оси (см. рис.). Сечение пучка совпадает с основание конуса, радиус



которого $R=1\ см$. Высота конуса $h=1{,}73\ см$. Определить площадь светлого пятна на экране, перпендикулярном оси конуса и расположенном на расстоянии $a=1\ см$ от вершины конуса.

Решение:



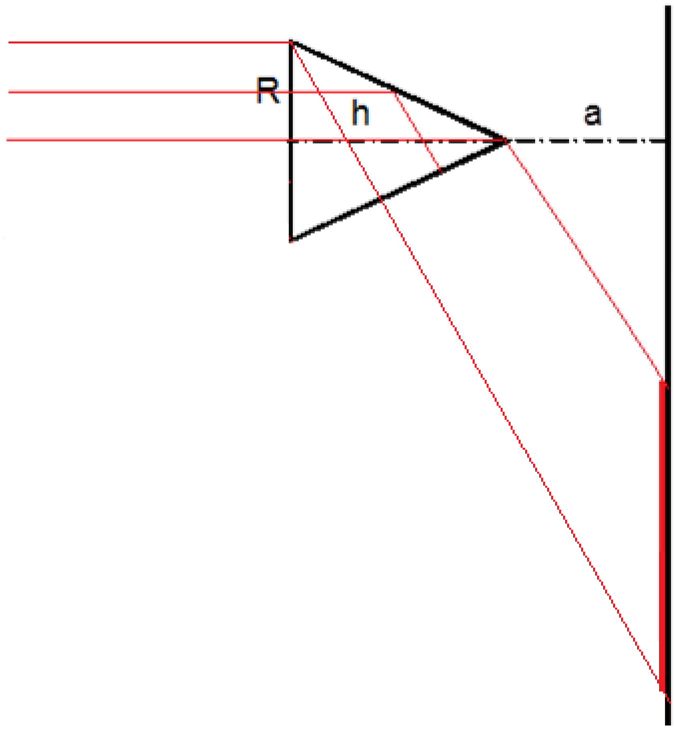
$tg\alpha=\dfrac{h}{R}=1{,}73$, т.е. $\alpha=60^O$ **(1 балл)**

Закон преломления для лучей проходящих через конус:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{1{,}5}$$

В результате: $\sin\beta=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\geq 1$ **(2 балла)**

Получаем, что лучи проходящие через конус испытывают полное отражение.



Из геометрических соображений выясняется, что на другую грань конуса они падают по нормали. **(2 балла)**

Следовательно, световое пятно на экране ограниченно двумя окружностями с радиусами:

$$R_1 = a \cdot tg60^O = 0{,}01\sqrt{3} = 0{,}0173 \ м$$ **(2 балл)**

$$R_2 = ((h+a) \cdot tg60^O) - R = 0{,}0273\sqrt{3} - 0{,}01 = 0{,}0373 \ м$$ **(2 балл)**

Получаем:

$$S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 0{,}0034 \ м^2 = 34 \ см^2$$ **(1 балл)**

Олимпиада школьников «Звезда»
Задачи по математике
6 марта 2016 г.
Решения и критерии оценивания

10 класс
Вариант 1

1. Вычислите площадь фигуры, заданной неравенством

$$x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y).$$

Ответ: 8π.

Решение. Если переписать неравенство в виде

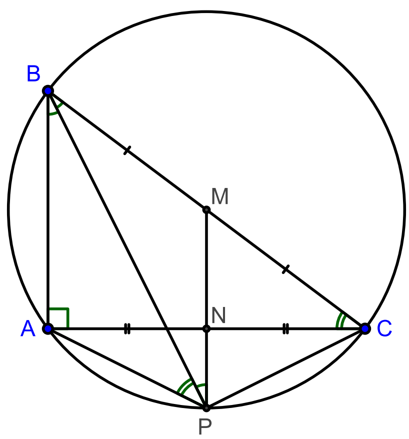
$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 8,$$

легко можно заметить, что оно задаёт круг, квадрат радиуса которого равен 8.

Оценивание. За верное решение 10 баллов.

2. ABC — прямоугольный треугольник, M — середина гипотенузы BC, N — середина катета AC, P — точка пересечения биссектрисы угла B и прямой MN. Докажите равенство углов BCA и BPA.

Доказательство. MN — средняя линия треугольника ABC. Поэтому прямые AB и MN параллельны, а углы MPB и ABP равны как накрест лежащие. К тому же $\angle ABP = \angle PBM$ (по определению биссектрисы). Значит, $\angle MPB = \angle PBM$, отсюда треугольник BMP равнобедренный: $BM = MP$.



По условию, $BM = MC$. Стало быть, точка M равноудалена от вершин треугольника BCP, т. е. M — центр описанной окружности, а лежит M на стороне этого треугольника. Поэтому треугольник BPC — прямоугольный, а точки P и A лежат на окружности с диаметром BC. Углы BCA и BPA равны как опирающиеся на одну дугу.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. Решите уравнение

$$2x^3 = (2x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Ответ: 1; $\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$.

Первое решение. Пусть $t = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Тогда $x-1 = x^2-t^2$, а исходное уравнение можно переписать в виде $2x^3 = (3x^2 - t^2)t$. Очевидно, $x = 0$ не является корнем исходного уравнения. Поделим последнее уравнение на x^3. Относительно новой переменной $y = \frac{t}{x}$ получится уравнение $y^3 - 3y + 2 = 0$. Заметим, что $y^3 - 3y + 2 = (y-1)^2(y+2)$. Поэтому $y = 1$ или $y = -2$. В первом случае получаем $\sqrt{x^2 - x + 1} = x$, откуда $x = 1$. Во втором случае возникает уравнение $\sqrt{x^2 - x + 1} = -2x$, равносильное выполнению двух соотношений:

$$3x^2 + x - 1 = 0; \quad x \leqslant 0.$$

Поэтому нужно выбрать отрицательный корень полученного квадратного уравнения.

Второе решение. Пусть $x > 0$. Поделим обе части исходного уравнения на x^3. Поскольку в этом случае $\sqrt{x^2} = x$, получим

$$2 = (2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Замена $t = \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ (заметим, что $t > 0$) даёт уравнение $2 = (3-t^2)t$, единственный положительный корень которого $t = 1$. Возращаясь к переменной x, находим положительный корень исходного уравнения $x = 1$.

Пусть теперь $x < 0$. Поделим обе части исходного уравнения на x^3. Поскольку в этом случае $\sqrt{x^2} = -x$, получим

$$2 = -(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Замена $t = \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ (заметим, что $t > 0$) даёт уравнение $2 = -(3 - t^2)t$, единственный положительный корень которого $t = 2$. Возращаясь к переменной x, находим отрицательный корень исходного уравнения.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если просто угадан корень $x = 1$, 1 балл. Если найден корень $x = 1$ (так, как это показано во 2-м способе решения) и потерян отрицательный корень (из-за того, что неявно предполагалось, что $x > 0$), 4 балла.

4. 100 шариков одинаковой массы с одинаковыми скоростями двигаются по жёлобу к металлической стенке. После столкновения со стенкой шарик отскакивает от неё с той же скоростью. При столкновении двух шариков они разлетаются с той же скоростью. (Шарики двигаются только по жёлобу). Найдите общее число соударений шариков между собой.

Ответ: 4950.

Решение. Будем считать, что у каждого шарика есть флажок. Представим, что при столкновении шарики обмениваются флажками. Тогда каждый флажок с постоянной скоростью долетает до стенки, после чего летит в противоположном направлении. Количество соударений шариков равно количеству обменов флажками. Любые два флажка единожды поменяются местами. Значит, общее число обменов равно $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

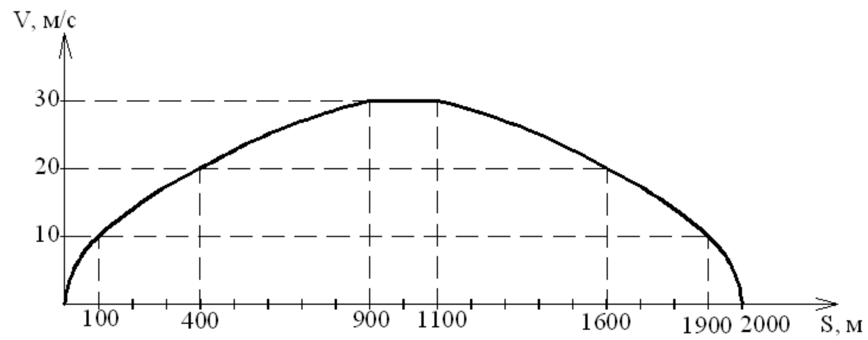
«Естественные науки»

Задачи по физике.

2015/16уч.г.

Задача №1 (15 баллов)

Автомобиль при включении зеленого сигнала светофора трогается с места. При приближении к следующему светофору для него вновь зажигается красный сигнал. На графике приведена зависимость скорости автомобиля от пройденного расстояния. Определить время движения автомобиля между светофорами.



Решение:

На первом участке зависимость скорости от расстояния:

$$v^2 \sim S$$ **(3 балла)**

Найдем ускорение:

$$a = \frac{v^2}{2S} = 0{,}5\ м/с^2$$ **(3 балла)**

Время, затраченное на этот участок:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 900}{0{,}5}} = 60\ с$$ **(3 балла)**

На втором участке движение равномерное и время:

$$t_2 = \frac{S}{v} = \frac{200}{30} \approx 6{,}7\ c$$ **(2 балла)**

Время движения на последнем участке равно времени движения на первом. **(3 балла)**

Окончательный результат:

$$t = 2t_1 + t_2 = 2 \cdot 60 + 6{,}7 = 126{,}7\ секунды$$ **(1 балл)**

Задача №2 (10 баллов)

2 моля молекулярного кислорода находятся в вертикальном сосуде с гладкими стенками, который закрыт невесомым поршнем. Температура кислорода $T = 300\ K$. В ходе медленного нагревания объем газа увеличился в три раза, при этом $40\ \%$ молекул диссоциировали на атомы. Определить работу, совершенную газом в данном процессе.

Решение:

Раз $40\ \%$ молекул диссоциировали на атомы, следовательно, количество вещества увеличилось в $1{,}4$ раза:

$$\nu_2 = 1{,}4 \cdot \nu_1 = 2{,}8\ моля$$ **(3 балла)**

Процесс – изобарный, следовательно, из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$ следует, что:

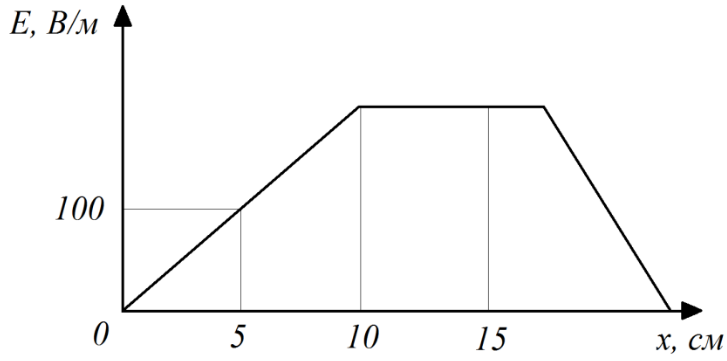
$$T_2 = \frac{30}{14} T_1 = \frac{30 \cdot 300}{14} \approx 643\ K$$ **(3 балла)**

Работа газа в данном процессе:

$$A = p\Delta V = \nu_2 RT_2 - \nu_1 RT_1 = (2{,}8 \cdot 8{,}31 \cdot 643) - (2 \cdot 8{,}31 \cdot 300) \approx 9975\ Дж$$ **(4 балла)**

Задача №3 (10 баллов)

В пространстве создано электрическое поле, напряженность которого от координаты зависит следующим образом (см. рисунок).



Данное поле переместило частицу массой $1\ мг$ и зарядом $1\ мКл$ из точки с координатой $5\ см$ в точку с координатой $15 см$. Определить скорость заряда в конечной точке, если в начальной точке она покоилась.

Решение:

Напряженность в точке с координатой $10\ см$ равна $200\ В/м$ **(2 балла)**

Разность потенциалов конечной и начальной точек равна площади под графиком:

$$\Delta\varphi = (\frac{100+200}{2} \cdot 0{,}05) + (200 \cdot 0{,}05) = 17{,}5\ В$$ **(3 балла)**

Работа электрического поля равна кинетической энергии, приобретенной зарядом:

$$q\Delta\varphi = \frac{mv^2}{2}$$ **(3 балла)**

Откуда скорость заряда:

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta\varphi}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 17{,}5}{10^{-6}}} \approx 187\ м/с$$ **(2 балла)**

Задача №4 (15 баллов)

Предмет расположили перед двояковыпуклой линзой. В результате было получено изображение, размеры которого совпадали с размером предмета. После того как линзу заменили на двояковогнутую, радиусы кривизны поверхностей которой равны радиусам исходной линзы, изображение предмета сдвинулось на $240\ см$. Определить оптическую силу исходной линзы. Материалы линз одинаковые. Предмет с места не сдвигали.

Решение:

Исходная линза является собирающей, причем предмет располагается в её двойном фокусе. **(3 балла)**)

Вторая линза является рассеивающей, причем из формулы $D=(n-1)(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})$ следует, что у неё такая же по модулю оптическая сила. **(3 балла)**

Формула тонкой линзы во втором случае:

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{2F}-\frac{1}{f}$$ **(3 балла)**

Кроме того, из условия следует:

$$2F+f=2{,}4$$ **(3 балла)**

Решая эту систему, получаем, что: $F=0{,}9\ м$

Оптическая сила первой линзы:

$$D=\frac{1}{F}=\frac{10}{9}\ Дптр$$ **(3 балла)**

Олимпиада школьников «Звезда»
Задачи по математике
6 марта 2016 г.
Решения и критерии оценивания

11 класс
Вариант 1

1. Вычислите площадь поверхности

$$x^2+y^2+z^2=4(x+y+z).$$

Ответ: 48π.

Решение. Если переписать уравнение в виде

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=12,$$

легко можно заметить, что оно задаёт сферу, квадрат радиуса которой равен 12.

Оценивание. За верное решение 10 баллов. Если найдено, что поверхность — сфера радиусом $2\sqrt{3}$, но ошибка из-за незнания формулы площади сферы, 5 баллов.

2. В точках пересечения графика функции $y=\frac{20x^2-16x+1}{5x-2}$ с осью Ox провели касательные к этому графику. Найдите углы наклона этих прямых к оси Ox.

Ответ: $\operatorname{arctg} 8$.

Решение. График функции $y=\dfrac{20x^2-16x+1}{5x-2}$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2. Найдём производную функции в этих точках:

$$y'(x_i)=\frac{8(5x_i-2)^2-5(20x_i^2-16x_i+1)}{(5x_i-2)^2}=8,$$

поскольку $20x_i^2-16x_i+1=0$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если верно найдены производная и точки пересечения графика с осью Ox, но есть ошибки в арифметических выкладках, 6 баллов.

3. Решите уравнение

$$2x^3=(2x^2+x-1)\sqrt{x^2-x+1}.$$

Ответ: 1; $\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$.

Первое решение. Пусть $t=\sqrt{x^2-x+1}$. Тогда $x-1=x^2-t^2$, а исходное уравнение можно переписать в виде $2x^3=(3x^2-t^2)t$. Очевидно, $x=0$ не является корнем исходного уравнения. Поделим последнее уравнение на x^3. Относительно новой переменной $y=\frac{t}{x}$ получится уравнение $y^3-3y+2=0$. Заметим, что

$y^3-3y+2=(y-1)^2(y+2)$. Поэтому $y=1$ или $y=-2$. В первом случае получаем $\sqrt{x^2-x+1}=x$, откуда $x=1$. Во втором случае возникает уравнение $\sqrt{x^2-x+1}=-2x$, равносильное выполнению двух соотношений:

$$3x^2+x-1=0; \quad x \leqslant 0.$$

Поэтому нужно выбрать отрицательный корень полученного квадратного уравнения.

Второе решение. Пусть $x>0$. Поделим обе части исходного уравнения на x^3. Поскольку в этом случае $\sqrt{x^2}=x$, получим

$$2=(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Замена $t=\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ (заметим, что $t>0$) даёт уравнение $2=(3-t^2)t$, единственный положительный корень которого $t=1$. Возращаясь к переменной x, находим положительный корень исходного уравнения $x=1$.

Пусть теперь $x<0$. Поделим обе части исходного уравнения на x^3. Поскольку в этом случае $\sqrt{x^2}=-x$, получим

$$2=-(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Замена $t=\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ (заметим, что $t>0$) даёт уравнение $2=-(3-t^2)t$, единственный положительный корень которого $t=2$. Возращаясь к переменной x, находим отрицательный корень исходного уравнения.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если просто угадан корень $x=1$, 1 балл. Если найден корень $x=1$ (так, как это показано во 2-м способе решения) и потерян отрицательный корень (из-за того, что неявно предполагалось, что $x>0$), 4 балла.

4. 20 шариков одинаковой массы с одинаковыми скоростями двигаются по жёлобу по направлению к металлической стенке. Навстречу им с такой же скоростью двигаются 16 шариков той же массы. При столкновении двух шариков они разлетаются с той же скоростью. После столкновения со стенкой шарик отскакивает от неё с той же скоростью. (Шарики двигаются только по жёлобу). Сколько будет соударений шариков между собой?

Ответ: 510.

Решение. Будем считать, что изначально у каждого шарика, двигающегося к стенке, красный флажок, а у остальных шариков синие флажки. Представим, что при столкновении шарики обмениваются флажками. Тогда каждый синий флажок двигается с постоянной скоростью в одном направлении (от стенки), а каждый красный долетает до стенки, после чего летит в противоположном направлении. Количество соударений шариков равно количеству обменов флажками. Каждый красный флажок один раз поменяется с каждым синим. Любые два красных флажка также единожды поменяются местами. Значит, общее число обменов равно $20 \cdot 16 + \frac{20 \cdot 19}{2} = 510$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

«Естественные науки»

Задачи по физике.

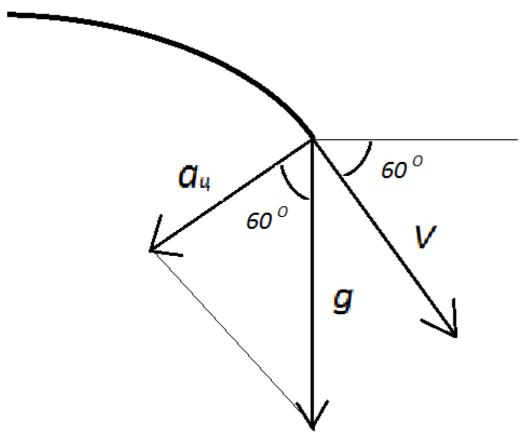
2015/16уч.г.

Задача №1 (10 баллов)

Камень брошен с поверхности Земли под углом 60^O к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10\ м/с$. Определить радиус кривизны траектории в конечной точке полета. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

Решение:

Конечная скорость камня равна его начальной скорости: **(3 балла)**



Центростремительное ускорение в конечной точке полета:

$$a_Ц = g \cdot \cos 60^O = 5\ м/с^2$$ **(4 балла)**

Радиус кривизны траектории в конечной точке полета:

$$R = \frac{v^2}{a_Ц} = \frac{10^2}{5} = 20\ м$$ **(3 балла)**

Задача №2 (10 баллов)

В вертикальном сосуде с прямыми стенками закрытом поршнем находится вода. Её высота $h = 2\ мм$. Воздуха в сосуде нет. На какую высоту необходимо поднять поршень, для того чтобы вся вода испарилась. Плотность воды $\rho = 1000\ кг/м^3$, молярная масса водяного пара $M = 0{,}018\ кг/моль$, давление насыщенного водяного пара при температуре $T = 50\ ^0C$ равно $p = 12300\ Па$. Температура воды и пара поддерживается постоянной.

Решение:

Масса воды в сосуде:

$m = \rho S h$, где S – площадь основания сосуда. **(2 балла)**

Уравнение состояния идеального газа для водяного пара:

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$ **(2 балла)**

где объем занимаемый паром $V = S(h + x)$. **(2 балла)**

В результате получаем:

$$pS(h + x) = \frac{\rho S h}{M} RT$$ **(2 балла)**

Окончательный ответ:

$$x = \frac{\rho h R T}{M p} - h = \frac{1000 \cdot 0{,}002 \cdot 8{,}31 \cdot 323}{0{,}018 \cdot 12300} - 0{,}002 = 24{,}2\ м$$ **(2 балла)**

Задача №3 (15 баллов)

Имеется источник тока с внутренним сопротивлением $r = 20\ Ом$. Какое внешнее сопротивление нужно подключить к источнику, чтобы мощность, выделяющаяся на внешнем сопротивлении, отличалась от максимально возможной на $25\ \%$?

Решение:

Мощность тока:

$$P = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R + r}\right)^2 R$$ **(2 балла)**

Она будет максимальной при $R = r$, т.е.:

$$P_{MAX} = \left(\frac{\varepsilon}{R + r}\right)^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{20 + 20}\right)^2 20 = \frac{\varepsilon^2}{80}$$ **(5 баллов)**

Мощность, о которой идет речь, отличается на $25\ \%$, т.е. $P = 0{,}75 \cdot \frac{\varepsilon^2}{80}$. **(2 балла)**

Получаем:

$$0{,}75\cdot\frac{\varepsilon^2}{80}=\left(\frac{\varepsilon}{R+20}\right)^2 R$$ **(3 балла)**

Получили квадратное уравнение, корнями которого являются:

$R_1 = 6{,}7\ Ом$

$R_2 = 60\ Ом$ **(3 балла)**

Задача №4 (15 баллов)

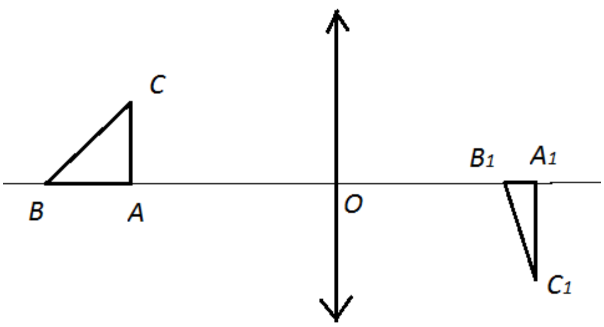
Прямоугольный равнобедренный треугольник располагается недалеко от собирающей линзы таким образом, что вершина прямого угла совпадает с двойным фокусом линзы, а один из катетов перпендикулярен главной оптической оси. Известно, что площадь треугольника $8\ см^2$, а площадь изображения ровно в два раза меньше. Определить фокусное расстояние линзы.

Решение:

Площадь треугольника:

$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC$, отсюда $AB = BC = 4\ см$ **(3 балла)**

Можно сделать вывод, что исходный треугольник, его изображение и линза располагаются следующим образом: **(3 балла)**



Точка A в двойном фокусе, следовательно, $A_1C_1 = AC = 4\ см$ **(2 балла)**

Площадь треугольника $A_1B_1C_1$:

$$S_1=\frac{1}{2}S = 4\ см^2 = \frac{1}{2}A_1B_1\cdot A_1C_1$$

Получаем, что $A_1B_1 = 2\ см$ **(2 балла)**

Формула тонкой линзы для точки B и её изображения:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{2F+4}+\frac{1}{2F-2}$$ **(3 балла)**

Решая это уравнение, **получаем, что:** $F = 4\ см$ **(2 балла)**

!!!Если задача решена правильно, то за отсутствие рисунка баллы не снижать!!!